II Test (Geometria)

Lunedì 25 gennaio 2016

Esercizio 1. Nel piano affine euclideo sono date la conica $\mathcal{C} \; : \; x^2 - 4xy + 6y^2 - 4y = 0$ e la retta $r \; : \; x - 2y = 0$.

(a) Dopo aver riconosciuto la conica $\mathcal{C}$ (dal punto di vista proiettivo e affine), scriverne l'equazione in forma omogenea, interpretarne il primo membro come una forma quadratica in $\mathbb{R}^3$ e stabilire se la corrispondente forma (bilineare simmetrica) polare è isotropa o anisotropa; determinarne il radicale. [Ellisse generale a punti reali; forma isotropa, radicale banale] $\boxed{4}$

(b) Scrivere l'equazione del fascio $\mathscr{F}$ di coniche tangenti a $\mathcal{C}$ nei punti in cui essa è intersecata dalla retta r. Verificare che il fascio $\mathscr{F}$ può essere rappresentato dall'equazione:

$$(1+k)x^2 - 4(1+k)xy + 2(3+2k)y^2 - 4y = 0, \; k \in \mathbb{R} \; \cup \; x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$$

$\boxed{3}$

(c) Determinare le equazioni delle coniche degeneri di $\mathscr{F}$; fornire una rappresentazione grafica delle coniche degeneri (e di $\mathcal{C}$). [Coniche degeneri: $(x-2y)^2 = 0$; $y(y-2) = 0$] $\boxed{4}(+2)$

(d) Verificare che tutte le coniche non degeneri di $\mathscr{F}$ hanno lo stesso centro. [$C(2;1)$] $\boxed{2}$

(e) Determinare l'equazione della conica del fascio $\mathscr{F}$ avente la retta $a \; : \; x - y - 1 = 0$ come asse. [$x^2 - 4xy + y^2 + 6y = 0$] $\boxed{3}$

(f) Considerate le tangenti alla generica conica di $\mathscr{F}$ nei punti in cui essa è intersecata dalla retta $t \; : \; x - 2y + 1 = 0$, indicare con L il punto di intersezione tra tali tangenti. Scrivere l'equazione cartesiana del luogo descritto dal punto L al variare della conica nel fascio $\mathscr{F}$. Riconoscere tale luogo. [Iperbole degenere: $(y-1)(2y-x) = 0$; si noti che se si considerano solo le coniche non degeneri del fascio, il luogo si riduce alla retta $y = 1$, privata del punto $C(2;1)$] $\boxed{5}$

Esercizio 2. Siano $\alpha \; : \; hx + y + 2z - 4 = 0$ e $\beta \; : \; (h-1)y - 2z - 2 = 0$, con $h \in \mathbb{R}$, due piani dello spazio affine euclideo. Sia t la retta $2x + y - 1 = 0 = x - 2y + z$.

(a) Determinare le posizioni reciproche tra i piani α e β, al variare di h. [Incidenti per $h \neq 0$, paralleli per $h = 0$] $\boxed{3}$

(b) Posto $h = 1$, scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente la retta $r := \alpha \cap \beta$ e parallelo alla retta t. $[5x + 5y - z - 31 = 0]$ $\boxed{4}$

(c) Per $h = 1$, indicato con T il punto della retta t di coordinate intere che dista $2\sqrt{6}$ da α, determinare le equazioni della curva ottenuta ruotando T attorno alla retta r. [La curva è una circonferenza di equazioni $(x-6)^2+y^2+(z+1)^2-122 = 0 = x-y+4$; si noti che la prima delle due equazioni rappresenta una sfera col centro sulla retta r e passante per il punto T, per cui puo' essere scelta anche in modo diverso] $\boxed{6}$